

Zusatz. Wählt man für $Q(z, x)$ diejenige unstetige Funktion, welche für $x \leq z$ gleich $+1$ und für $x > z$ gleich 0 ist, so folgt, daß die Reihe

$$\sum_{v=1}^{v=\infty} \int_a^b f(y) \psi_v(y) dy \cdot \int_a^z \psi_v(x) dx$$

für $a \leq z \leq b$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

§ 3.

Ersetzung linear unabhängiger Funktionensysteme durch orthogonale.

Es seien $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ n für $a \leq x \leq b$ definierte reelle stetige Funktionen, die als linear unabhängig vorausgesetzt werden. Dann konstruieren wir die Funktionen*)

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{\int_a^b (\varphi_1(y))^2 dy}} \\ \psi_2(x) &= \frac{\varphi_2(x) - \psi_1(x) \int_a^b \varphi_2(z) \psi_1(z) dz}{\sqrt{\int_a^b (\varphi_2(y) - \psi_1(y) \int_a^b \varphi_2(z) \psi_1(z) dz)^2 dy}} \\ &\vdots \\ \psi_n(x) &= \frac{\varphi_n(x) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n-1} \psi_{\varrho}(x) \int_a^b \varphi_n(z) \psi_{\varrho}(z) dz}{\sqrt{\int_a^b (\varphi_n(y) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n-1} \psi_{\varrho}(y) \int_a^b \varphi_n(z) \psi_{\varrho}(z) dz)^2 dy}}. \end{aligned}$$

Durch diese Formeln ist für jedes v $\psi_v(x)$ rekursiv durch $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_v(x)$ linear homogen mit konstanten Koeffizienten darstellbar und umgekehrt auch $\varphi_v(x)$ durch $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_v(x)$. In keiner der Formeln kann nämlich der Nenner verschwinden; denn wäre v der erste Index, für welchen das geschähe, so müßte

$$\varphi_v(x) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=v-1} \psi_{\varrho}(x) \int_a^b \varphi_v(z) \psi_{\varrho}(z) dz = 0$$

sein, und da die $\psi_{\varrho}(x)$ aus den $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{v-1}(x)$ linear homogen

*) Im wesentlichen dieselben Formeln sind von J. P. Gram in der Abhandlung „Ueber die Entwicklung reeller Functionen in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate“, Crelles Journal Bd. 94, aufgestellt worden.